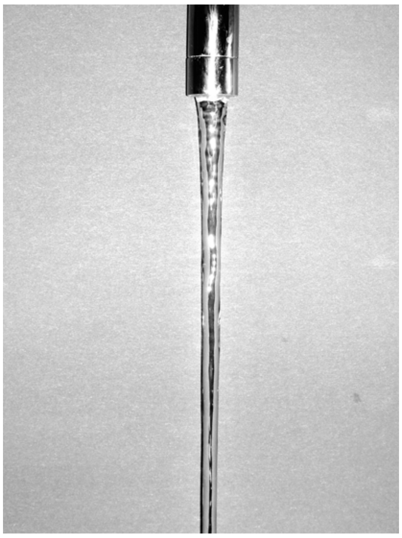
Water en zwaartekracht

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hoeveelheid water die per tijdseenheid uit een kraan stroomt constant is en dat het water uit de kraan recht naar beneden stroomt. Zie de foto.

foto



We kunnen de uitstroomsnelheid v_1 van het water bij het verlaten van de kraan uitrekenen met behulp van de formule:

$$v_1 = \frac{W}{A_1}$$

Hierin is v_1 de uitstroomsnelheid in cm/s, W is de hoeveelheid water die per tijdseenheid uit de kraan stroomt in cm^3/s en A_1 is de oppervlakte van de uitstroomopening van de kraan in cm^2.

Het duurt precies 2 minuten voordat een emmer met een inhoud van 10 liter (= 10 000 cm^3) volledig met water uit de kraan is gevuld. De cirkelvormige uitstroomopening van de kraan heeft een diameter van 1,6 cm.

3p **16** Bereken de uitstroomsnelheid. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm/s.

Het water onder in een waterstraal heeft een hogere snelheid dan het water dat net uit de kraanopening stroomt. Dit komt door de werking van de zwaartekracht.

Voor de stroomsnelheid van het water in een waterstraal geldt de volgende formule:

$$v_2 = \sqrt{v_1^{\,2} + 19{,}62 \cdot l}$$

Hierin is v_1 weer de uitstroomsnelheid in cm/s en v_2 is de stroomsnelheid van het water in cm/s op een afstand l in cm van de kraanopening.

We zijn geïnteresseerd in de stroomsnelheid van het water op een afstand van 40 cm van de kraanopening.
Er is een bepaalde uitstroomsnelheid waarbij de stroomsnelheid op deze afstand twee maal zo groot is als de uitstroomsnelheid.

4p **17** Bereken bij welke uitstroomsnelheid dit het geval is.

Op elke hoogte in de waterstraal is de hoeveelheid water die per seconde passeert gelijk. Er geldt dus:

(1) $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

Hierin is A_1 de oppervlakte van de cirkelvormige uitstroomopening van de kraan en A_2 is de oppervlakte van de cirkelvormige dwarsdoorsnede van de waterstraal.

De straal van de kraanopening noemen we r_1 en de straal van de dwarsdoorsnede van de waterstraal noemen we r_2. Voor de oppervlakten van de kraanopening en de dwarsdoorsnede van de waterstraal geldt dan

(2) $A_1 = \pi \cdot r_1^2$ en

(3) $A_2 = \pi \cdot r_2^2$.

Ook geldt nog steeds de formule:

(4) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 19{,}62 \cdot l}$

Uit de bovenstaande vier formules kan voor de straal r_2 de volgende formule worden afgeleid:

$$r_2^2 = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + 19{,}62 \cdot l}} \cdot r_1^2$$

4p **18** Leid deze formule af.

Als je de foto goed bekijkt, zie je dat de waterstraal naar beneden toe steeds smaller wordt. Dat blijkt ook uit de formules hierboven (hoe groter l, hoe kleiner r_2).

Iemand wil een flesje met water vullen. De diameter van de cirkelvormige opening van het flesje is 1,6 cm. Hij vult het flesje onder een kraan waarvan de uitstroomopening een diameter van 2,0 cm heeft. Het water stroomt met een snelheid van 18 cm/s uit de kraan. Om geen water te verspillen, zal hij het flesje niet direct onder de opening van de kraan houden, maar een stuk lager.

3p **19** Bereken de minimale afstand tussen de opening van de kraan en de opening van het flesje waarbij geen water verspild wordt. Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.